21-5-19

Άσκηση: Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline που προσεγγίζει την f:

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	0	3	0	-3	0

και $f'(-2)=8$, $f'(2)=8$

Λύση

$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 1$

$\Delta f_0 = 3$

$\Delta f_1 = -3$

$\Delta f_2 = -3$

$\Delta f_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0+\Delta x_2) & \Delta x_0 & \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1+\Delta x_2) & \Delta x_1 \\ & \Delta x_3 & 2(\Delta x_2+\Delta x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1}\Delta f_1\right) - \Delta x_1 f'(-2) \\ 3\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\Delta f_2\right) \\ 3\left(\frac{\Delta x_3}{\Delta x_2}\Delta f_2 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3}\Delta f_3\right) - \Delta x_2 f'(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4&1&0\\1&4&1\\0&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1'\\S_2'\\S_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-18\\-8\end{bmatrix}$$

$$-\frac{4}{15}\quad\begin{pmatrix}4&1&0&-8\\0&\frac{15}{4}&1&-16\\0&1&4&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&1&0&-8\\0&\frac{15}{4}&1&-16\\0&0&\frac{56}{15}&-\frac{56}{15}\end{pmatrix}$$

Άρα $\boxed{S' = [-1, 4, -1]}$

Στο $[-2, -1]$

$$S(x) = [(x+2)^2 - 2(x+2)^2(x+1)]3 + (x+1)^2(x+2)8$$
$$+ (x+2)^2(x+1)(-1) = \; = x^3 - 4x$$

Στο $[-1, 0]$:

$$S(x) = [x^2 + 2x(x+1)]\cdot 3 - x^2(x+1) - 4(x+1)^2 x = \; = x^3 - 4x$$

Στο $[0, 1]$

$$S(x) = -3[x^2 - 2x^2(x-1)] - 4(x-1)^2 x - x^2(x-1) = \; = x^3 - 4x$$

Στο $[1, 2]$

$$S(x) = -3[(x-2)^2 + 2(x-2)^2(x-1)] - (x-2)^2(x-1) + 8(x-1)^2(x-2)$$

$$= \; = x^3 - 4x$$

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline της $f(x) = x + |x|$ ορισμένης στο $[-1,1]$ στο σύνολο σημείων $\{-1, 0, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} x - x = 0 & x \in [-1, 0] \\ x + x = 2x & x \in [0, 1] \end{cases}$$

x_i	-1	0	1
f_i	0	0	2

$f'(-1) = 0 \quad f'(1) = 2$

$\Delta x_0 = \Delta x_1 = 1 \mid \Delta f_0 = 0 \mid \Delta f_1 = 2$

Άρα έχουμε:

$$2(\Delta x_0 + \Delta x_1) S_1' = 3\left[\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1}\Delta f_1\right]$$
$$- \Delta x_1 f'(-1) - \Delta x_0 f'(1)$$

$\Leftrightarrow \quad 4S_1' = 6 - 2 = 4 \Rightarrow S_1' = 1$

Στο $[-1, 0]$:

$$S(x) = (x+1)^2 x = x^3 + 2x^2 + x$$

Στο $[0, 1]$:

$$S(x) = [x^2 - 2x^2(x-1)] \cdot 2 + 1(x-1)^2 x + 2x^2(x-1)$$
$$= \ldots = -x^3 + 2x^2 + x$$

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline της $f(x) = x + |x|$ ορισμένη στο $[-1,1]$ στο σύνολο σημείων $\{-1, 0, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} x - x = 0 & x \in [-1,0] \\ x + x = 2x & x \in [0,1] \end{cases}$$

x_i	-1	0	1
f_i	0	0	2

$f'(-1) = 0 \quad f'(1) = 2$

$\Delta x_0 = \Delta x_1 = 1 \;|\; \Delta f_0 = 0 \;|\; \Delta f_1 = 2$

Άρα έχουμε

$$2(\Delta x_0 + \Delta x_1) S_1' = 3\left[\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1}\Delta f_1\right] - \Delta x_1 f'(-1) - \Delta x_0 f'(1)$$

$\Leftrightarrow \quad 4S_1' = 6 - 2 = 4 \Rightarrow S_1' = 1$

Στο $[-1,0]$:

$$S(x) = (x+1)^2 x = x^3 + 2x^2 + x$$

Στο $[0,1]$:

$$S(x) = [x^3 - 2x^2(x-1)] \cdot 2 + 1(x-1)^2 x + 2x^2(x-1) = \; = -x^3 + 2x^2 + x$$

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline που προσεγγίζει την f

x_i	-1	0	1	2
f_i	-1	0	0	1

και $f'(-1)=3$

$f'(2)=3$

Λύση

$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$

$\Delta f_0 = 1$

$\Delta f_1 = 0$

$\Delta f_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0+\Delta x_1) & \Delta x_0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1+\Delta x_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1' \\ s_2' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1}\Delta f_1\right) - \Delta x_1 f'(-1) \\ 3\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\Delta f_2\right) - \Delta x_1 f'(2) \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1' \\ s_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1' = s_2' = 0$$

Άρα $[s_1' \ \ s_2'] = [0, 0]$

Στο $[-1, 0]$:

$$S(x) = [x^2 + 2x^2(x+1)](-1) + 3x^2(x+1) = \dots = x^3$$

Στο $[0, 1]$:

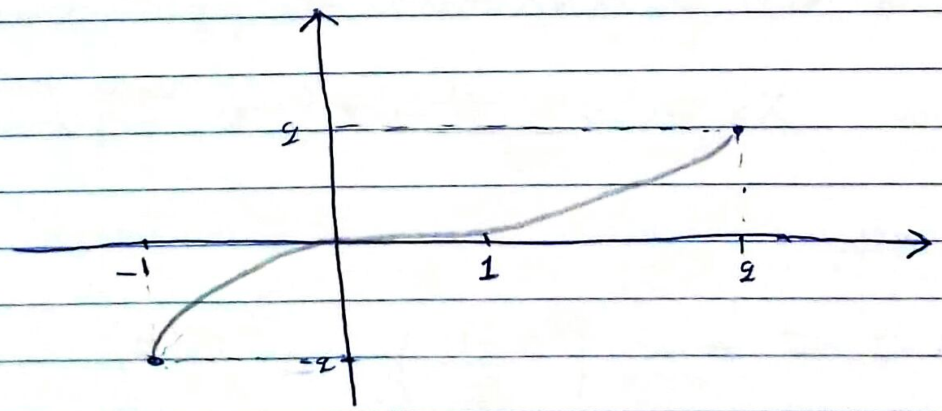
$$S(x) = 0$$

Στο $[1, 2]$:

$$S(x) = [(x-1)^2 - 2(x-2)^2(x-2)] + 3(x-1)^2(x-2)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$= (x-1)^3$$



ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ (2015)

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρεθεί η β.ο.π της $f(x) = x^2 - x$ ορισμένης στο $[0,2]$ στο P_1

Λύση

Με προσδιοριστέους συντελεστές:

Έστω $p_1^* = ax + \beta$

$$e(x) = f(x) - p_1^*(x) = x^2 - (a+1)x - \beta$$

$$e'(x) = 2x - (a+1)$$

$$e'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{a+1}{2}} \in [0,2]$$

Τα άλλα 2 ακρότατα θα βρίσκονται στα άκρα.

Άρα $X_3 = \{0, \frac{a+1}{2}, 2\} \to$ Σύνολο εναλλασσόμενων σημείων

Πρέπει:

$$e(0) = -e\left(\frac{a+1}{2}\right) = e(2)$$

$$\Leftrightarrow \underset{(1)}{-\beta} = \underset{(2)}{-\left[\frac{(a+1)^2}{4} - \frac{(a+1)^2}{2} - \beta\right]} = \underset{(3)}{4 - 2(a+1) - \beta}$$

$$(1) = (3) \Leftrightarrow -\beta = 4 - 2a - 2 - \beta \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$(1) = (2) \Rightarrow \quad -\beta = -[1-2-\beta] \Leftrightarrow$

$-\beta = 1+\beta \Rightarrow -2\beta = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{1}{2}}$

ΑΡΑ $p_1^*(x) = x - \frac{1}{2}$

Με πολυωνυμα Chebychev

Επειδή η συναρτηση ειναι στο $[0,2]$ θα πρέπει να την μετασχηματισω στο $[-1,1]$ για να δουλέψω με πολυωνυμα Chebychef.

Εχουμε $\boxed{x(t) = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} = t+1}$

Θέτουμε $g(t) = f(x(t)) = (t+1)^2 - (t+1) = t^2 + t \quad t \in [-1,1]$

$$g^*(t) = g(t) - \frac{c}{2} T_2(x)$$

$$= t^2 + t - \frac{1}{2}(2t^2 - 1) = t + \frac{1}{2}$$

Αρα $\boxed{g^*(t) = t + \frac{1}{2}}$

Τώρα $x = t+1 \Rightarrow \boxed{t = x-1}$

Αρα $p^*(x) = g^*(t(x)) = x - 1 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

Αρα $\boxed{p^*(x) = x - \frac{1}{2}}$

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρεθεί η β.ο.π της f που ορίζεται στο $X_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ στο P_1

X_i	-2	-1	0	1	2
f_i	-1	0	-1	2	3

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εναλλαγής σημείων με $X_\sigma = \{-2, -1, 0\}$

Λύση:

Έχουμε $p_\sigma(x) = a_0 + a_1 x$ όπου a_0, a_1 προκύπτουν απ' τη λύση του συστήματος $Xa = f$ όπου

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f(-2) \\ f(-1) \\ f(0) \end{bmatrix}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} \\ 2a_0 = -1 \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2} \\ 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow [\lambda, a_0, a_1]' = [\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0]$$

ΑΡΑ: $\boxed{P_\sigma(x) = -\frac{1}{2}}$

Άρα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -1 \\ 2a_0 &= 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ 3a_1 &= 3 \Rightarrow a_1 = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow [\lambda, a_0, a_1]' = [-1, 0, 1]$$

Άρα $\boxed{P_1(x) = x}$

$$\boxed{\rho_1 = |\lambda| = 1}$$

$$e(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - x$$

$$e(-2) = -1-(-2) = 1$$

$$e(-1) = 0-(-1) = 1$$

$$e(0) = -1-0 = -1$$

$$e(1) = 2-1 = 1$$

$$e(2) = 3-2 = 1$$

Άρα $\boxed{M = \max\{e(x)\} = 1 = \rho_1}$

Άρα $\boxed{P^*(x) = x}$

$\rho_\sigma = |\lambda| = \frac{1}{2}$ $\quad M = \frac{7}{2} > \rho_\sigma = \frac{1}{2}$

$e(x) = f(x) - \rho_\sigma(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}$

$e(-2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Ε ξοδος

$e(-1) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$e(0) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$e(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$e(2) = 3 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{2}} \rightarrow M \rightarrow$ έξοδος

Άρα έχουμε $X_1 = \{-1, 0, 2\}$

Όμοια με πριν έχουμε: $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ και έχουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$

ΘΕΜΑ 3ο Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της f ορισμένης στο $X_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$ στο P_2

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	0	0	4

με ορθογώνια πολυώνυμα που παράγονται απ' την αναδρομική σχέση

Λύση:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) \xrightarrow{\text{Grand-Smith}} x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} \cdot 1 = x - \frac{2}{4} = x - \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = (x - a_1) P_1 - \beta_1 P_0(x) \quad \text{όπου}$$

$$a_1 = \frac{(x P_1, P_1)}{(P_1, P_1)} \qquad \beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)}$$

$$(P_1, P_1) = \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \ldots = 5$$

$$(x P_1, P_1) = -1 \cdot \frac{9}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{9}{4} = \ldots = \frac{5}{2}$$

ΑΡΑ: $a_1 = \frac{1}{2} \qquad \beta_1 = \frac{5}{4}$

$$P_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = x^2 - x - 1$$

$$q^*(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x)$$ όπου

$$\lambda_0 = \frac{(f, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{-2+0+0+4}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{(f, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{(-2)(-1-\frac{1}{2}) + (0-\frac{1}{2})\cdot 0 + (1-\frac{1}{2})\cdot 0 + (2-\frac{1}{2})\cdot 4}{\cancel{5}\ \ 5}$$

$$= \frac{\cancel{4}9}{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{(f, P_2)}{(P_2, P_2)}$$

Άρα πρέπει να βρω το (P_2, P_2)

$P_2(-1) = 1+1-1 = 1$

$P_2(0) = -1$

$P_2(1) = 1-1-1 = -1$

$P_2(2) = 4-2-1 = 1$

Άρα $(P_2, P_2) = 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4$

$(f, P_2) = (-2)\cdot 1 + 0(-1) + 0(-1) + 4\cdot 1 = 2$

Άρα $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

Άρα $q^*(x) = \frac{1}{2} + \frac{9}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(x^2 - x - 1)$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{9}{10}$$